V11.0

ECONOMETRÍA APLICADA

JOSÉ ALBERTO MAURICIO

S3

ANÁLISIS UNIVARIANTE DE SERIES TEMPORALES

CONTRASTES DE RAÍCES UNITARIAS EN MODELOS ARIMA

Departamento de Análisis Económico y Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid

1. INTRODUCCIÓN

Como parte de la diagnosis de un modelo ARIMA, en muchas ocasiones es suficiente llevar a cabo las comprobaciones sobre la estacionariedad y la invertibilidad de sus operadores AR y MA de manera informal. No obstante, a veces tiene interés realizar formalmente esas comprobaciones mediante el empleo de **contrastes de raíces unitarias** en dichos operadores. Una dificultad asociada con esta posibilidad es que los estadísticos habituales para contrastar hipótesis sobre los parámetros AR y MA no siguen distribuciones estándar (Normal, t de Student, ...) cuando se emplean para contrastar la presencia de raíces unitarias [por ejemplo, $H_0\colon \phi_1 = 1$, $H_1\colon \phi_1 < 1$ en $(1-\phi_1 B)Y_t = \mu + A_t$, o $H_0\colon \theta_1 = 1$, $H_1\colon \theta_1 < 1$ en $\nabla Y_t = (1-\theta_1 B) + A_t$]. En las referencias siguientes puede encontrarse información y procedimientos detallados al respecto:

Box, G.E.P., Jenkins, G.M., Reinsel, G.C., Ljung, G.M. (2016), *Time Series Analysis: Forecasting and Control (Fifth Edition)*, Wiley (pp. 353-359).

Brockwell, P.J., Davis, R.A. (2016), *Introduction to Time Series and Forecasting (Third Edition)*, Springer (pp. 169-173).

Davis, R.A., Chen, M., Dunsmuir, W.T.M. (1995), "Inference for MA(1) Processes with a Root On or Near the Unit Circle," *Probability and Mathematical Statistics*, 15, 227-242.

Davis R.A., Chen M., Dunsmuir W.T.M. (1996), "Inference for Seasonal Moving Average Models with a Unit Root," en Robinson P.M., Rosenblatt M. (eds), *Athens Conference on Applied Probability and Time Series. Volume II: Time Series Analysis (Lecture Notes in Statistics 115)*, Springer (pp. 160-176).

Shin, D.W., Fuller, W.A. (1998), "Unit Root Tests Based on Unconditional Maximum Likelihood Estimation for the Autoregressive Moving Average," *Journal of Time Series Analysis*, 19, 591-599.

Tanaka, K. (2017), *Time Series Analysis: Nonstationary and Noninvertible Distribution Theory (Second Edition)*, Wiley (pp. 349-458).

Wei, W.W.S. (2006), *Time Series Analysis: Univariate and Multivariate Methods (Second Edition)*, Pearson (pp. 186-211).

A continuación se resumen dos de los contrastes considerados en las referencias anteriores, y se ilustra con un ejemplo cómo utilizarlos para concretar el número de diferencias regulares que puede requerir una serie para hacerla estacionaria en media.

2. CONTRASTE DE NO ESTACIONARIEDAD DE SHIN-FULLER

Cuando el operador autorregresivo regular en un modelo ARIMA contiene un factor del tipo $(1-\phi_1 B)$, el **contraste de no estacionariedad de Shin-Fuller (SF)** consiste en **rechazar** $H_0\colon \phi_1 = 1$ en favor de $H_1\colon \phi_1 < 1$ (con un nivel de significación dado) cuando

$$SF = \begin{cases} \hat{l} - \hat{l}^* & \text{si } \hat{\phi}_1 \le 1 - \frac{4}{n} \\ 0 & \text{si } \hat{\phi}_1 > 1 - \frac{4}{n} \end{cases} \quad [1]$$

es **mayor** que el valor crítico correspondiente de la Tabla 1. En [1], $\hat{l}$ es el logaritmo (ln) de la **función de verosimilitud exacta** (FVE) en la estimación por **máxima verosimilitud exacta** (MVE) del modelo, $\hat{\phi}_1$ es la estimación MVE del parámetro ϕ_1, $\hat{l}^*$ es el ln de la FVE en la estimación por MVE bajo la restricción de que $\phi_1 = 1 - 4/n$, y n es el número de observaciones efectivo de la serie empleada para calcular $\hat{l}$, $\hat{\phi}_1$ y $\hat{l}^*$.

TABLA 1

Valores Críticos para el Contraste SF

Shin-Fuller 1998 p. 598

	Nivel de Significación		
n	10%	5%	1%
25	1.02	1.68	3.33
50	1.06	1.75	3.41
100	1.07	1.75	3.41
250	1.07	1.76	3.44
500	1.08	1.77	3.46

3. CONTRASTE DE NO INVERTIBILIDAD DE DAVIS-CHEN-DUNSMUIR

Cuando el operador media móvil en un modelo ARIMA contiene un factor del tipo $(1 - \theta_1 B^S)$ con $S \geq 1$, el **contraste GLR de Davis-Chen-Dunsmuir (DCD)** consiste en **rechazar** $H_0 : \theta_1 = 1$ en favor de $H_1 : \theta_1 < 1$ (con un nivel de significación dado) cuando

$$DCD = 2 \times (\hat{l} - \hat{l}^*) \qquad [2]$$

es **mayor** que el valor crítico correspondiente de la Tabla 2. En [2], $\hat{l}$ es el ln de la FVE en la estimación por MVE del modelo, y $\hat{l}^*$ es el ln de la FVE en la estimación por MVE bajo la restricción de que $\theta_1 = 1$.

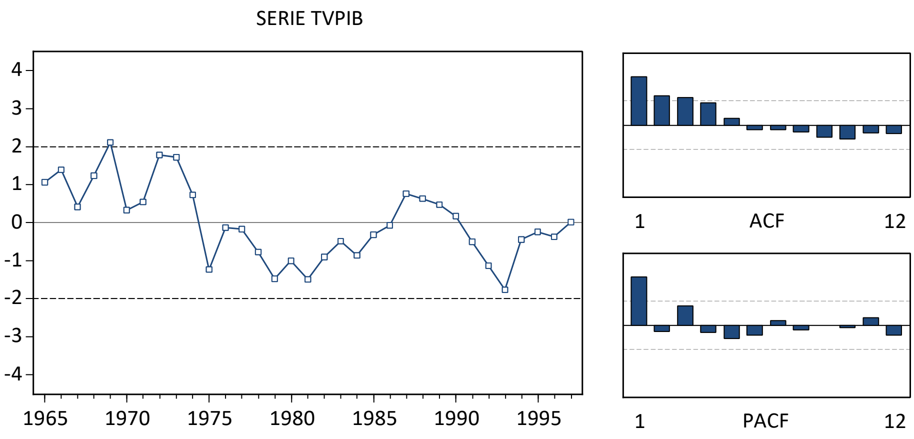
TABLA 2

Valores Críticos Asintóticos para el Contraste DCD

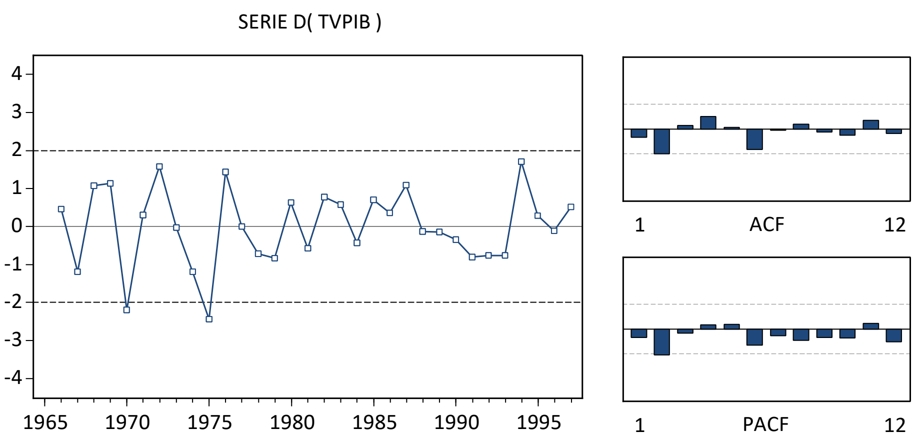
Davis-Chen-Dunsmuir 1995 p. 232, 1996 p. 167

	Nivel de Significación			
S	10%	5%	2.5%	1%
1	1.00	1.94	2.95	4.41
4	1.21	2.18	3.17	4.75
12	1.36	2.31	3.44	5.12

4. EJEMPLO - ST02 : Y = TVPIB



N = 33 - MEDIA = 3.3556 (0.0000) - DT = 2.3947



N = 32 - MEDIA = -0.078 (0.8172) - DT = 1.9069

Si se considera que la serie y_t (TVPIB) es estacionaria, entonces se puede identificar para y_t un modelo AR(1) con media $\beta_0 = \mathrm{E}[Y_t] \neq 0$:

$$(1 - \phi_1 B)(Y_t - \beta_0) = A_t , \qquad [3]$$

cuya estimación por MVE proporciona lo siguiente (a título ilustrativo, comparar con la estimación que proporciona EViews del mismo modelo):

$$\begin{gathered}(1 - \underset{(0.1274)}{0.6790}B)\,(y_t - \underset{(0.9067)}{3.5013}) = \hat{a}_t , \\ n = 33,\ \ \hat{l} = -64.9093,\ \ \mathrm{AIC} = 4.0551,\ \ \mathrm{BIC} = 4.1458.\end{gathered} \qquad [4]$$

Contraste de No Estacionariedad (SF): La estimación por MVE del modelo [3] proporciona $\hat{\phi}_1 = 0.6790 < 1 - 4/33$, $\hat{l} = -64.9093$. Por otro lado, la estimación por MVE de [3] bajo la restricción de que $\phi_1 = 1 - 4/33$ proporciona $\hat{l}^* = -66.2679$. Por lo tanto, $SF = \hat{l} - \hat{l}^* = 1.3586$. De acuerdo con la Tabla 1, la hipótesis de que $\phi_1 = 1$ en [3] **se debe rechazar** al 10% en favor de que $\phi_1 < 1$, aunque **no se puede rechazar** al 5%, lo que no aclara del todo la cuestión de si y_t es una serie estacionaria o no lo es ...

Añadiendo en [3] una diferencia regular (en el lado izquierdo) y el correspondiente "testigo de posible sobrediferenciación" MA(1) (en el lado derecho), se obtiene el modelo

$$(1-\phi_1 B)\nabla Y_t = (1-\theta_1 B)A_t\,. \qquad [5]$$

Si $\theta_1 = 1$, [5] es idéntico a [3] (lo que supondría que y_t sería una serie estacionaria y [4] sería un modelo adecuado), mientras que si $\theta_1 < 1$, [5] implicaría que y_t sería una serie no estacionaria y [5] sería un modelo adecuado (probablemente con $\phi_1 = \theta_1 = 0$, de acuerdo con la segunda figura de la página anterior).

La estimación por MVE de [5] proporciona lo siguiente (a título ilustrativo, comparar con la estimación que proporciona EViews del mismo modelo):

$$\begin{gathered}(1-\underset{(0.2744)}{0.6469}B)\nabla y_t = (1-\underset{(0.1950)}{0.9038})\hat{a}_t\,, \\ n=32,\quad \hat{l}=-63.9741,\ \text{AIC}=4.1234,\ \text{BIC}=4.2150.\end{gathered} \qquad [6]$$

Contraste de No Invertibilidad (DCD): La estimación por MVE del modelo [5] proporciona $\hat{l} = -63.9741$. Por otro lado, la estimación por MVE de [5] bajo la restricción de que $\theta_1 = 1$ proporciona $\hat{l}^* = -64.0443$. Por lo tanto, $DCD = 2\times(\hat{l}-\hat{l}^*) = 0.1404$, que es **menor** que cualquier valor crítico de la Tabla 2 para $S = 1$. En consecuencia, la hipótesis de que $\theta_1 = 1$ en [5] **no se puede rechazar** ni siquiera al 10%, lo que sugiere que y_t es una serie estacionaria.

Observación: Los contrastes SF y DCD son probablemente los contrastes de raíces unitarias más recomendables entre los disponibles actualmente. Sin embargo, dado que su empleo requiere la estimación por MVE (no condicionada) de modelos ARIMA, no son ni remotamente tan populares como otros contrastes que requieren métodos de estimación más sencillos (aunque, igualmente, menos recomendables que MVE). En particular, los contrastes SF y DCD **no** están implementados en EViews, aunque sí lo están varios contrastes de raíces unitarias menos recomendables (aunque más populares) en general.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Como ilustra el ejemplo anterior, los contrastes de **raíces unitarias** de Shin-Fuller (SF) y de Davis-Chen-Dunsmuir (DCD) pueden resultar útiles como ayuda en la decisión sobre el número $d \geq 0$ de diferencias regulares que requiere una serie para hacerla estacionaria en media. En general, cuando se duda entre $d = d_1$ y $d = d_2$ ($d_2 > d_1$): **[1]** escribir un modelo plausible para $\nabla^{d_2} y_t$ (serie potencialmente *sobrediferenciada*), reemplazar ∇^{d_2} en dicho modelo por $(1-\phi_1 B)\nabla^{d_2-1}$, considerar la inclusión del parámetro $\beta_0 = \mathrm{E}[Y_t]$, y contrastar con SF $\phi_1 = 1$ frente a $\phi_1 < 1$. Alternativamente, **[2]** escribir un modelo plausible para $\nabla^{d_1} y_t$ (serie potencialmente *subdiferenciada*), reemplazar ∇^{d_1} por ∇^{d_1+1}, añadir un término MA(1) del tipo $(1-\theta_1 B)$ en el lado derecho (testigo de posible sobrediferenciación), suprimir (si lo hubiera) el parámetro $\beta_0 = \mathrm{E}[Y_t]$ del modelo, y contrastar con DCD $\theta_1 = 1$ frente a $\theta_1 < 1$.